Universidad Andrés Bello

Solemne 3 - 2011

P.4] Considere el paralelepípedo $\Omega = [0,a] \times [0,b] \times [0,c]$ en $\mathbb{R}^3$, se asume que las caras en $z=0$ y $z=c$ son termicamente aisladas. Mientras en $y=a$ y $y=b$ se mantienen a temperatura $T=0$. Mientras el resto de las caras satisface:

* $T(0,y,z) = 0$.
* $T(a,y,z) = T_0 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{2\pi}{c} z\right)$

Determinar la temperatura en Ω.

Solución:

la ecuación de difusión de color es:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{c} \Delta T \quad \ldots (1).$$

Se asumira un valor de $c = 1$; y como el tiempo no es mencionado como variable, se asumira tambien un regimen estacionario.

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} = 0.$$

De lo anterior, la ecuación a resolver es la siguiente:

$$\Delta T = 0$$

Debido a la geometria del problema, se usaran coordenadas cartesianas. Entonces la ecuacion queda exprosada como:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] T = 0 \quad \ldots (2)$$

usando el método de separación de variables, podemos asumir lo siguiente de la función $T(x,y,z)$.

$$T(x,y,z) = X(x) Y(y) Z(z)$$

Reemplazamos en (2):

Escaneado con CamScanner

2|

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[XYZ_1] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}[XYZ_1] + \frac{\partial^2}{\partial z^2}[XYZ_1] = 0$$

$$YZ_1 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + XZ_1 \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + XY \frac{\partial^2 Z_1}{\partial z} = 0.$$

simplificamos un poco la notación:

$$YZ_1 X'' + XZ_1 Y'' + XY Z_1'' = 0.$$

Dividimos entre XYZ_1, suponiendo $XYZ_1 \neq 0$.

$$\frac{YZ_1 X''}{XYZ_1} + \frac{XZ_1 Y''}{XYZ_1} + \frac{XYZ_1''}{XYZ_1} = 0$$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z_1''}{Z_1} = 0$$

Escogemos una constante de separación $-\alpha^2$ para:

$$\frac{Z_1''}{Z_1} = -\alpha^2 \quad \ldots (3)$$

la solución de la ecuación anterior es:

$$Z_{1\alpha}(z) = A_\alpha \cos(\alpha z) + B_\alpha \operatorname{sen}(\alpha z).$$

la condición de aislamiento Termico, en la direccion $\hat{z}$, implica:

$$\vec{\nabla} T \cdot \hat{z} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} T = \frac{\partial}{\partial x}(XYZ_1)\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}(XYZ_1)\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}(XYZ_1)\hat{z}$$

Entonces:

$$\vec{\nabla} T \cdot \hat{z} = \left[YZ_1 \frac{\partial X}{\partial x}\hat{x} + XZ_1 \frac{\partial Y}{\partial y}\hat{y} + XY \frac{\partial Z_1}{\partial z}\hat{z}\right] \cdot [0\hat{x} + 0\hat{y} + 1\hat{z}]$$

$$= XY \frac{\partial Z_1}{\partial z}$$

$$\Rightarrow XY \frac{\partial Z_1}{\partial z} \equiv XY \frac{dZ_1}{dz}$$

luego: $XY \frac{dZ_1}{dz} = 0.$

esto se comple para:
$z = 0$ y $z = c$, para todos los valores de Y, X

Escaneado con CamScanner

Universidad Andrés Bello

De lo anterior basta con analizar $\frac{d\,Z_\alpha}{dz}$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\,Z_\alpha}{dz} = 0.$$

Calculamos la derivada:

$$\frac{d\,Z_\alpha}{dz} = -A_\alpha(\alpha)\,\text{sen}(\alpha z) + B_\alpha(\alpha)\cos(\alpha z).$$

Aplicando la condición de borde en $z=0$, Tenemos:

$$-A_\alpha(\alpha)\,\text{sen}[\alpha(0)] + B_\alpha(\alpha)\cos[\alpha(0)] = 0.$$

$$-A_\alpha(\alpha)\,[0] + B_\alpha(\alpha)\,[1] = 0$$

$$B_\alpha(\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{B_\alpha = 0} \; ; \text{asumiendo } \alpha \neq 0.$$

Entonces, la función $Z_\alpha(z)$ queda como: $Z_\alpha(z) = A_\alpha \cos(\alpha z)$.

y su derivada queda como: $Z'_\alpha(z) = -A_\alpha(\alpha)\,\text{sen}(\alpha z)$.

Aplicando la otra condición de borde en $z = c$, tenemos:

$$-A_\alpha(\alpha)\,\text{sen}[\alpha(c)] = 0.$$

Asumiendo $A_\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 0$, Tenemos:

$$\text{sen}[\alpha(c)] = 0$$

$$\rightarrow \quad \alpha(c) = n\pi$$

$$\rightarrow \boxed{\alpha_n = \frac{n\pi}{c}} \quad \text{Valores admisibles de } \alpha_n.$$

Por lo cual la función $Z_\alpha(z)$ queda como:

$$Z_{\alpha_n}(z) = A_{\alpha_n}\cos(\alpha_n z)$$

$$\boxed{Z_n(z) = A_n \cos\left[\frac{n\pi}{c} z\right]}$$

CAMPUS REPÚBLICA
Av. República 252 · Santiago
Teléfono: 56 2 2661 8000

CAMPUS CASONA DE LAS CONDES
Fernández Concha 700 · Las Condes
Teléfono: 56 2 2661 8500

CAMPUS BELLAVISTA
Av. Bellavista 0121 · Providencia
Teléfono: 56 2 2770 3490/3466

CAMPUS VIÑA DEL MAR
Quillota 910
Teléfono: 56 32 284 5000

CAMPUS CONCEPCIÓN
Autopista Concepción Talcahuano 7100
Teléfono: 56 41 266 2000

Escaneado con CamScanner

4]

Escogemos una variable de separación $-\beta^2$, para:

$$\frac{Y''}{Y} = -\beta^2$$

la solución para esta ecuación es:

$$Y_\beta(y) = A_\beta \cos(\beta y) + B_\beta \operatorname{sen}(\beta y)$$

Aplicando la condición de borde en $y=0$, Tenemos:

$$A_\beta \cos[\beta(0)] + B_\beta \operatorname{sen}[\beta(0)] = 0.$$

$$A_\beta [1] + B_\beta [0] = 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{A_\beta = 0}$$

Entonces la función $Y_\beta(y)$ queda como: $Y_\beta(y) = B_\beta \operatorname{sen}(\beta y)$.

Aplicando la condición de borde en $y=b$, Tenemos:

$$B_\beta \operatorname{sen}[\beta(b)] = 0$$

$$\operatorname{sen}[\beta(b)] = 0, \text{ asumiendo } B_\beta \neq 0.$$

$$\rightarrow \beta(b) = m\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta_m = \frac{m\pi}{b}}$$ Valores admisibles de β.

Entonces, la función $Y_\beta(y)$ queda como:

$$Y_{\beta_m}(y) = B_{\beta_m} \operatorname{sen}(\beta_m y)$$

$$\boxed{Y_m(y) = B_m \operatorname{sen}\left[\frac{m\pi}{b} y\right]}$$

Retornamos a la expresión:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0.$$

reemplazemos:

$$\frac{X''}{X} + \beta^2 - \alpha^2 = 0.$$

Escaneado con CamScanner

Universidad Andrés Bello

$$\Rightarrow \frac{X''}{X} = \beta^2 + \alpha^2.$$

reemplazamos las expresiones halladas para α y β.

$$\frac{X''}{X} = \left[\frac{m\pi}{b}\right]^2 + \left[\frac{n\pi}{c}\right]^2.$$

$$\Rightarrow \frac{X''}{X} = \pi^2\left[\left(\frac{m}{b}\right)^2 + \left(\frac{n}{c}\right)^2\right]$$

Podemos convenir en llamar $X_{n,m}(x) = \pi^2\left[\left(\frac{m}{b}\right)^2 + \left(\frac{n}{c}\right)^2\right]$

Con la expresión anterior, podemos escribir la solucion general como.

$$T(x,y,z) = \sum_{n,m} A_{n,m} X_{n,m}(x) Z_n(z) Y_m(y).$$

reemplazamos las expresiones de Z_n y Y_m.

$$T(x,y,z) = \sum_{n,m} A_{n,m} X_{n,m} A_n \cos\left[\frac{n\pi}{c} z\right] A_m \operatorname{sen}\left[\frac{m\pi}{b} y\right]$$

Como $A_{n,m}$, A_n, A_m son constantes que dependen de los valores n, m, podemos juntarlas todas en una sola que aún mantenga su dependencia de n, m, Podemos convenir en seguir llamandola $A_{n,m}$

$$\Rightarrow T(x,y,z) = \sum_{n,m} A_{n,m} X_{n,m} \cos\left[\frac{n\pi}{c} z\right] \operatorname{sen}\left[\frac{m\pi}{b} y\right]$$

Ahora, aplicamos la condición de borde: $T(a,y,z) = 0$

$$\Rightarrow \sum_{n,m} A_{n,m} X_{n,m}(a) \cos\left[\frac{n\pi}{c} z\right] \operatorname{sen}\left[\frac{m\pi}{b} y\right] = T_0 \operatorname{sen}\left[\frac{3\pi}{b} y\right] \cos\left[\frac{2\pi}{c} z\right]$$

Comparando ambas expresiones, se observa que el unico termino de la sumatoria que cumple la condición, es el asociado a los valores $n = 2$ y $m = 3$. Tambien, considerando este termino, se observa que:

$$A_{2,3} X_{2,3}(a) = T_0$$

Escaneado con CamScanner

6]

Entonces, la solución general va quedando como:

$$T(x,y,z) = A_{2,3} X_{2,3}(x) \cos\left[\frac{2\pi}{c} z\right] \operatorname{sen}\left[\frac{3\pi}{b} y\right]$$

Aplicando la condición de borde para $x=0$, Tenemos:

$$A_{2,3} X_{2,3}(0) \cos\left[\frac{2\pi}{c} z\right] \operatorname{sen}\left[\frac{3\pi}{b} y\right] = 0$$

asumiendo que: $\cos\left(\frac{2\pi}{c} z\right)$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{b} y\right)$ son diferentes de cero,

$$A_{2,3} X_{2,3}(0) = 0$$

Represendo, a la expresión: X''/X, Tenemos:

$$\frac{X''}{X} = \pi^2 \left[\left(\frac{m}{b}\right)^2 + \left(\frac{n}{c}\right)^2\right]$$

reemplazemos n y m:

$$\frac{X''}{X} = \pi^2 \left[\left(\frac{3}{b}\right)^2 + \left(\frac{2}{c}\right)^2\right]$$

Podemos llamar $r^2 = \pi^2 \left[\left(\frac{3}{b}\right)^2 + \left(\frac{2}{c}\right)^2\right]$

$$\Rightarrow \quad \frac{X''}{X} = r^2.$$

la solución a esta ecuación es:

$$X_r(x) = A_r \cosh(rx) + B_r \operatorname{senh}(rx)$$

Recordemos, que esta solucion debe cumplir: $X(a) = T_0$ y $X(0) = 0$.

⇒ nota: Como $A_{2,3}$ no afecta significativamente a las expresiones podemos ignorarla. Sin embargo, debe tenerse presente que no esta siendo anulada.

Aplicando la condicion para $x=0$, Tenemos:

$$A_r \cosh[r(0)] + B_r \operatorname{senh}[r(0)] = 0$$

$$A_r [1] + B_r [0] = 0$$

Escaneado con CamScanner

Universidad Andrés Bello

$$\Rightarrow \boxed{A_n = 0}$$

Entonces: X_n va quedando: $X_n(x) = B_n \operatorname{senh}(nx)$.

Ahora, retornamos a la expresión:

$$\frac{X''}{X} = \pi^2\left[\left(\frac{3}{b}\right)^2 + \left(\frac{2}{c}\right)^2\right]$$

Calculemos: X'' : $X_n' = B_n(n)\cosh(nx) \rightarrow X_n'' = B_n(n^2)\operatorname{senh}(nx)$.

$$\Rightarrow \frac{B_n(n^2)\operatorname{senh}(nx)}{B_n \operatorname{senh}(nx)} = \pi^2\left[\left(\frac{3}{b}\right)^2 + \left(\frac{2}{c}\right)^2\right]$$

$$n^2 = \pi^2\left[\left(\frac{3}{b}\right)^2 + \left(\frac{2}{c}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{n = \pi\sqrt{\left(\frac{3}{b}\right)^2 + \left(\frac{2}{c}\right)^2}}$$

Entonces: $X(x)$ queda como:

$$X(x) = B \operatorname{senh}\left[\pi\sqrt{\left(\frac{3}{b}\right)^2 + \left(\frac{2}{c}\right)^2}\,(x)\right]$$

Ahora, aplicamos la condición $X(a) = T_0$

$$\Rightarrow B \operatorname{senh}\left[\pi\sqrt{\left(\frac{3}{b}\right)^2 + \left(\frac{2}{c}\right)^2}\,(a)\right] = T_0$$

$$\boxed{B = \frac{T_0}{\operatorname{senh}\left[\pi\sqrt{\left(\frac{3}{b}\right)^2 + \left(\frac{2}{c}\right)^2}\,(a)\right]}}$$

Escaneado con CamScanner

8| Finalmente la solución general es:

$$T(x,y,z) = \frac{T_0}{\operatorname{senh}\left[\pi\sqrt{\left(\frac{3}{b}\right)^2+\left(\frac{2}{c}\right)^2}\,(a)\right]} \operatorname{senh}\left[\pi\sqrt{\left(\frac{3}{b}\right)^2+\left(\frac{2}{c}\right)^2}\,(x)\right] \cos\left[\frac{2\pi}{c}z\right] \operatorname{sen}\left[\frac{3\pi}{b}y\right]$$

Escaneado con CamScanner